B6 Triángulos

Polígono

Polígono es la porción del plano limitada por rectas que se cortan dos a dos.

Clasificación de los polígonos

Según el número de lados los polígonos se llaman: Triángulo (3), cuadrilátero (4), pentágono (5), hexágono (6), heptágono (7), octógono (8), eneágono (9), decágono (10), undecágono (11), dodecágono (12), pentadecágono (15), etc.

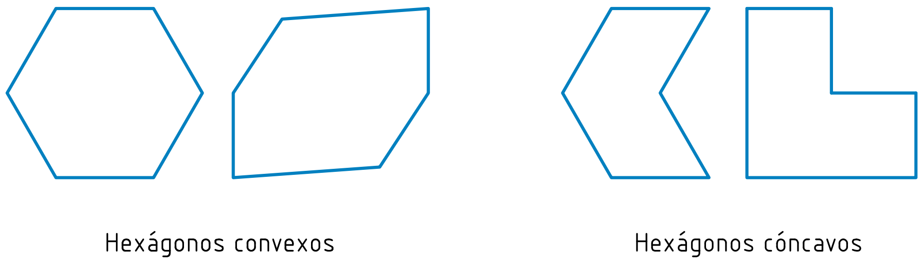
Elementos de un polígono

- Lados: son los segmentos que lo limitan.
- Vértices: son los extremos de los lados.
- Ángulos: Son los que forman cada dos lados consecutivos.
- Contorno: Es la línea quebrada que forman sus lados.
- Perímetro: Es la suma de sus lados.
- Diagonal: Es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

Polígono equilátero es el que tiene todos sus lados iguales.
Polígono equiángulo es el que tiene todos sus ángulos iguales.
Polígono regular es el que es equilátero y equiángulo a la vez. En los demás casos se llama irregular.

Polígono convexos y cóncavos

Polígono convexo es que se encuentra por entero en el semiplano que define una recta que pasa por uno cualquiera de sus lados. Es cóncavo si no cumple la propiedad anterior.
El polígono convexo sólo puede ser cortado en dos puntos por una recta coplanaria con él.
El polígono cóncavo puede ser cortado en más de dos puntos por una recta.

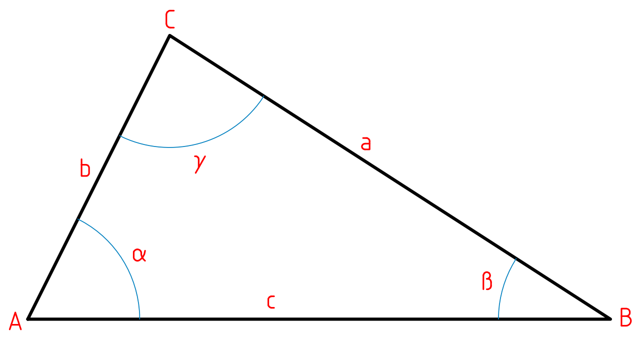


Triángulo

Es la parte del plano limitada por tres segmentos. Es un polígono de tres lados.

Los elementos del triángulo

- **Lados**, que son los tres segmentos que lo limitan: a, b y c.
- **Vértices**, que son los extremos de los lados: A, B y C.
- **Ángulos**, que son los tres ángulos que forman cada dos lados: α, β y γ.



Designaciones

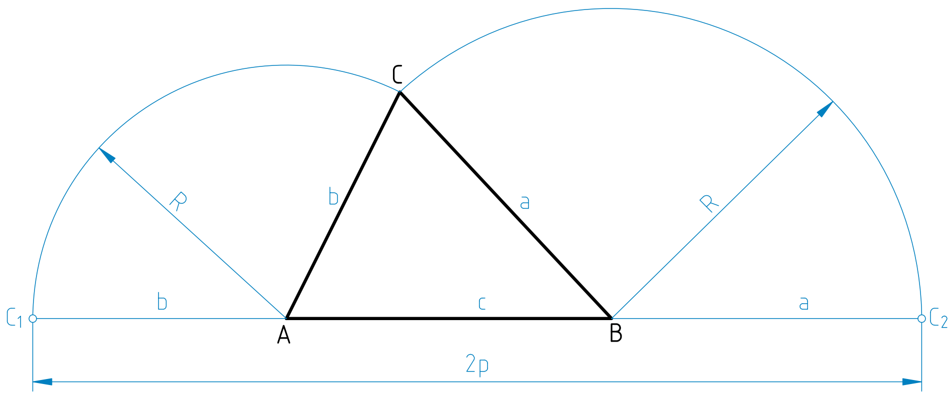
Un triángulo se designa mediante las tres letras mayúsculas de sus vértices: Triángulo ABC = ΔABC.

En un triángulo sus ángulos se designan con mayúsculas o letras griegas.

Los lados se designan por las letras de sus extremos o por una letra minúscula igual a la del vértice opuesto. Por ejemplo: lado AB o lado c.

Perímetro de un triángulo es la suma de sus tres lados. Se representa por 2p.

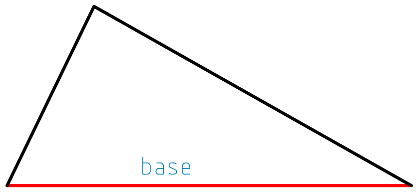
2p = a+b+c



Nótese que los triángulos ACC_1 y BCC_1 son isósceles.

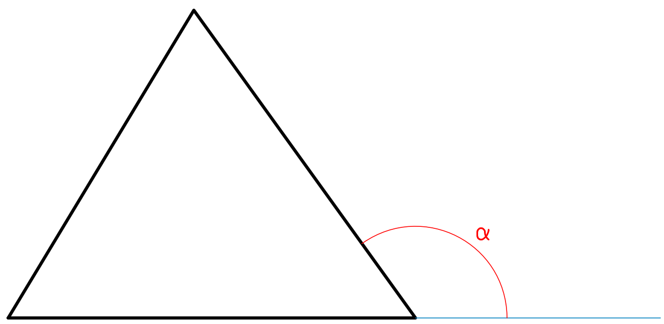
Base de un triángulo

Es un lado cualquiera. A menudo se llama base al lado horizontal sobre el cual parece que descansa el triángulo.



Ángulo exterior

Es el formado por un lado y la prolongación de otro. Es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes, por tanto mayor que cualquiera de ellos.



Propiedades fundamentales de los triángulos

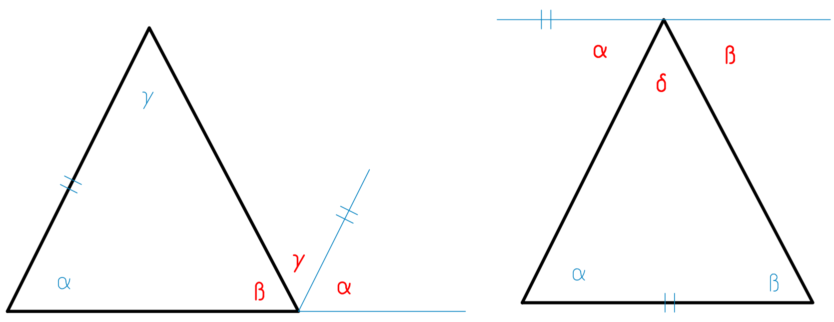
- Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

  $a<b+c$

  $a>b-c$

- Los ángulos interiores de un triángulo suman dos rectos o 180°.

Consecuencia: Un triángulo sólo puede tener un ángulo recto u obtuso y entonces los otros dos han de ser agudos.



$\alpha+\beta+\gamma = 180º$

Igualdad de triángulos

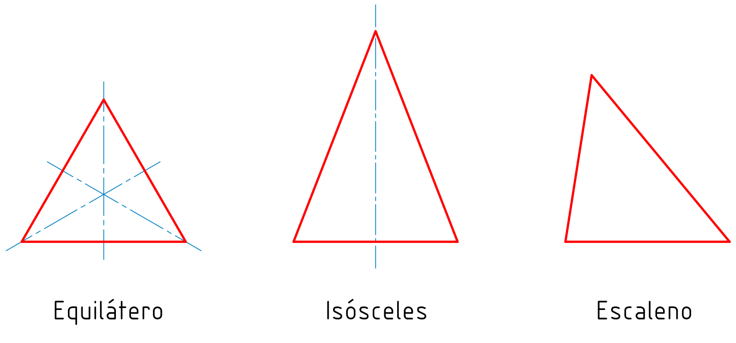
Dos triángulos son iguales cuando se pueden superponer de manera que coincidan todos los tres vértices del uno con sus homólogos del otro y, por consiguiente, serán respectivamente, iguales sus tres lados y sus tres ángulos.

Casos fundamentales de igualdad entre triángulos:

Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales:

- Los tres lados.
- Dos lados y el ángulo comprendido.
- Un lado y los dos ángulos contiguos.

Clasificación de los triángulos según sus lados

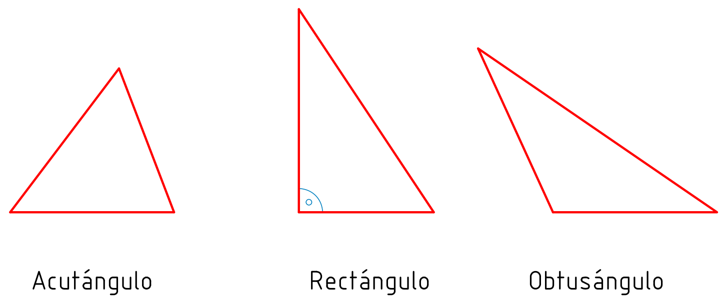


Según sus lados los triángulos pueden ser:

- Equiláteros, si sus tres lados son iguales.
- Isósceles, si dos lados son iguales y el tercero desigual.

- Escalenos, si los tres lados son desiguales.

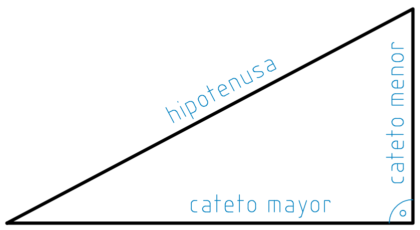
Clasificación de los triángulos según sus ángulos



Según sus ángulos los triángulos pueden ser:

- Acutángulos, si los tres ángulos son agudos.
- Rectángulos, si un ángulo es recto (los otros dos son forzosamente agudos).
- Obtusángulos, si un ángulo es obtuso (los otros dos son agudos).

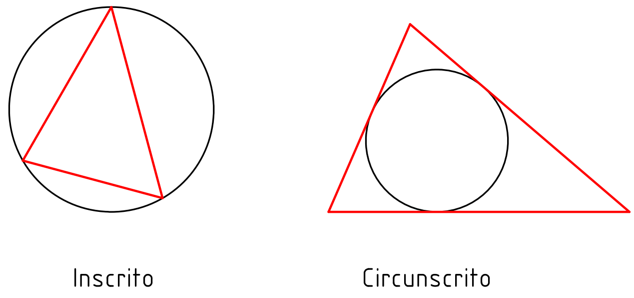
En los triángulos rectángulos se llama **catetos** a los lados que forman el ángulo recto e **hipotenusa** al lado opuesto a éste.



Relación entre los triángulos y la circunferencia

Entre un triángulo y una circunferencia hay dos posiciones relativas singulares: el triángulo inscrito y el triángulo circunscrito.

- **Triángulo inscrito** en una circunferencia es aquel que tiene sus vértices apoyados en la circunferencia.
  A su vez, la circunferencia es circunscrita al triángulo.
- **Triángulo circunscrito** a una circunferencia es aquel cuyos lados son tangentes a la circunferencia.
  A su vez, la circunferencia está inscrita en el triángulo.

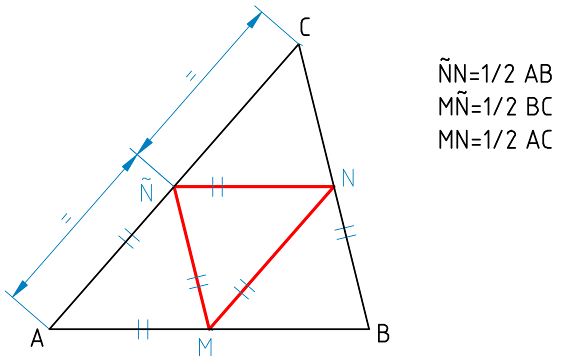


Relaciones entre los lados y los ángulos opuestos

- Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos también son iguales.
- Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, sus lados opuestos también son iguales.
- Si un triángulo tiene dos lados desiguales, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- Si un triángulo tiene dos ángulos desiguales, a mayor ángulo se opone mayor lado.

Paralela media de un lado de un triángulo

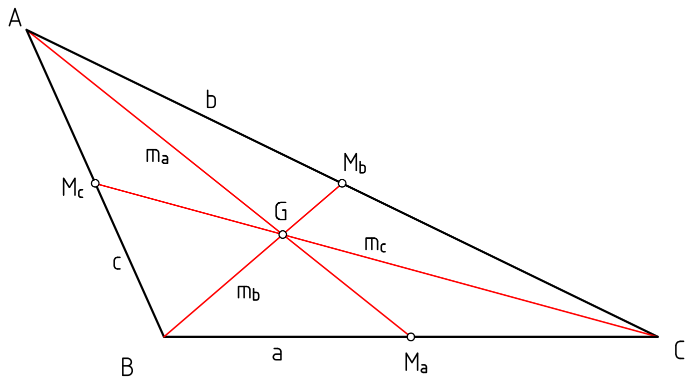
Es el segmento que une los puntos medios de los otros dos lados. Este segmento es paralelo a un lado y mide su mitad.



Los triángulos ABC y ÑNC son semejantes de razón CA/CÑ = 2 pues Ñ es punto medio de CA, por tanto AB/ÑN = 2; ÑN es la mitad de AB.

Puntos y líneas notables de los triángulos:

Medianas de un triángulo: Son los segmentos de recta que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

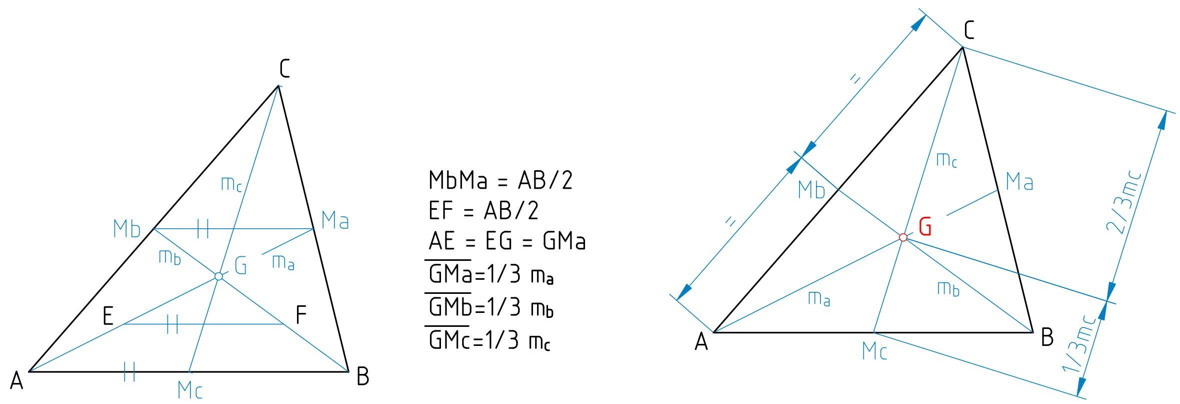


Baricentro de un triángulo

Es el punto donde concurren sus tres medianas.

Es el centro de gravedad del triángulo.

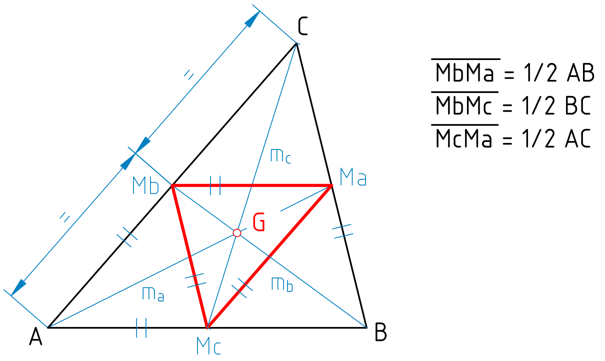
El baricentro dista de cada vértice 2/3 de la respectiva mediana.



MbMa y EF son paralelas medias de los triángulos ABC y ABG respectivamente, por tanto son iguales y miden la mitad de AB. Los triángulos GMaMb y GEB son iguales (Un lado igual y ángulos correspondientes, iguales). En consecuencia la mediana AMa está dividida en tres partes iguales por los puntos E y G.

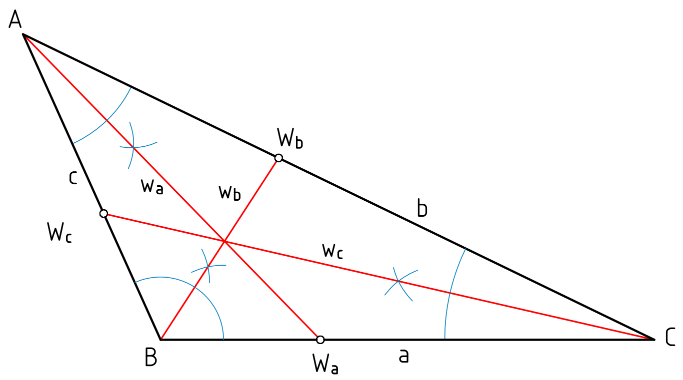
Triángulo complementario de un triángulo

Es aquel cuyos vértices son los puntos medios de los lados del primero. Sus lados miden respectivamente la mitad que los lados del triángulo original, a los que además, son paralelos.

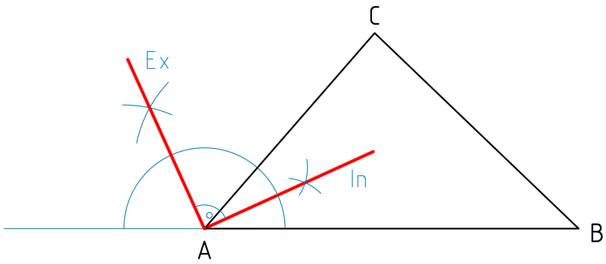


Bisectrices de un triángulo

Son las rectas que dividen a cada uno de sus ángulos en otros dos iguales. Considerando la bisectriz como un dato en la construcción de triángulos se llama bisectriz o segmento bisectriz al segmento que une el vértice del ángulo considerado con el punto de corte de la bisectriz con el lado opuesto.

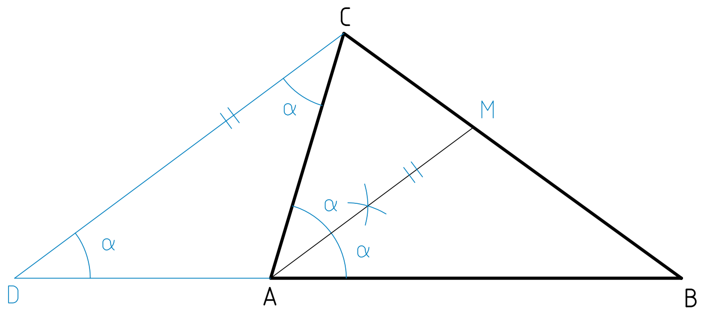


- Bisectriz interior de un triángulo es la bisectriz del ángulo que forman dos lados.
- Bisectriz exterior de un triángulo es la bisectriz del ángulo que forman un lado y la prolongación de otro.



Las bisectrices interior y exterior de un ángulo son perpendiculares.

- En todo triángulo, la bisectriz interior de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos proporcionales a los lados del ángulo.



La bisectriz de A divide al lado opuesto en los segmentos BM y MC.

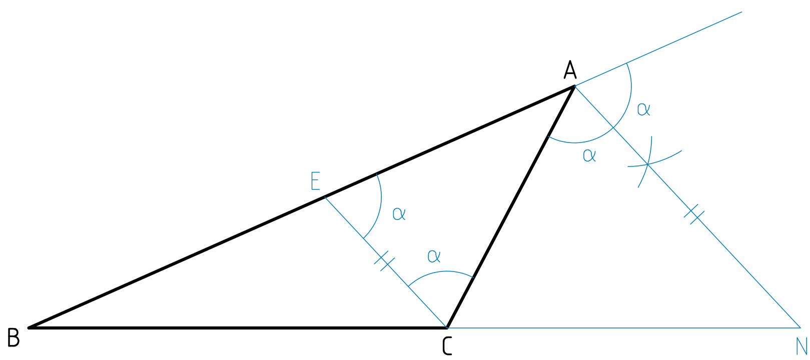
La paralela a la bisectriz de A, por C corta en D a la prolongación de lado AB.

El triángulo ACD es isósceles, AC=AD.

AB/AD = BM/MC

AB/AC = BM/MC

- En todo triángulo, la bisectriz exterior de un ángulo determina en el lado opuesto dos segmentos sustractivos proporcionales a los lados del ángulo.



La bisectriz exterior de A corta en N a la prolongación de lado BC.

La paralela a ésta bisectriz por C corta en E al lado AB.

El triángulo ACE es isósceles, AC=AE.

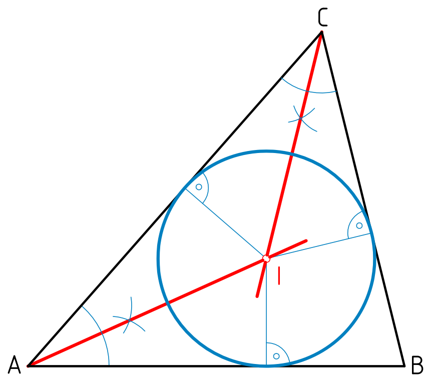
AB/AE = NB/NC

AB/AC = NB/NC

Incentro de un triángulo

Es el punto donde concurren sus tres bisectrices.

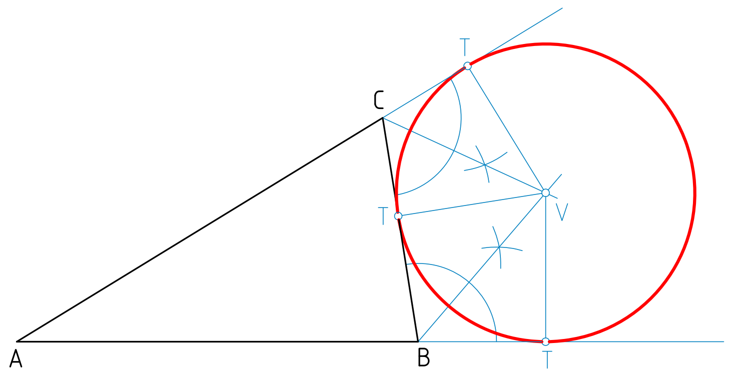
El incentro equidista de los tres lados del triángulo por lo que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Circunferencia exinscrita a un triángulo

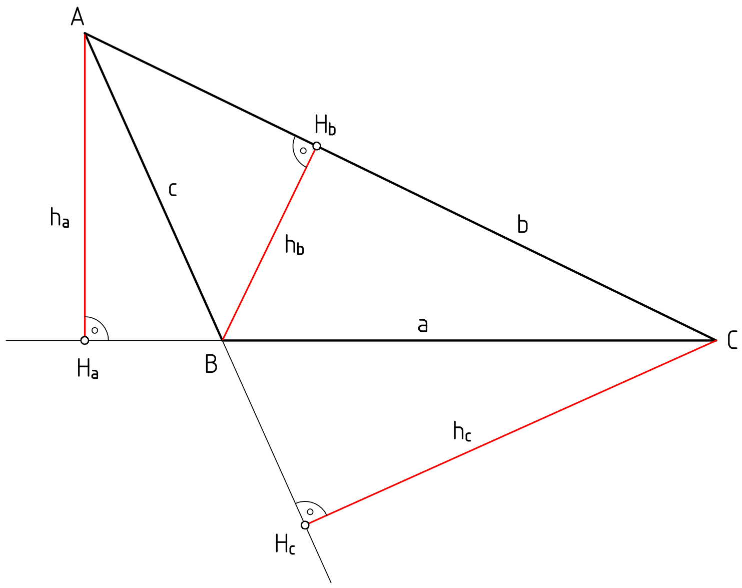
Es la circunferencia exterior a un triángulo tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos. En su centro se cortan un bisectriz interior y dos exteriores.

Los centros de las circunferencias exinscritas se llaman exincentros.



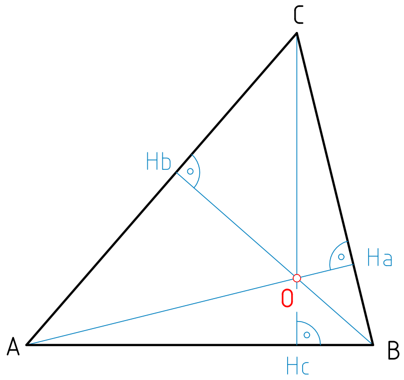
Alturas de un triángulo

Son los segmentos de recta que partiendo de cada vértice son perpendiculares a los lados opuestos de cada uno de ellos.



Ortocentro de un triángulo

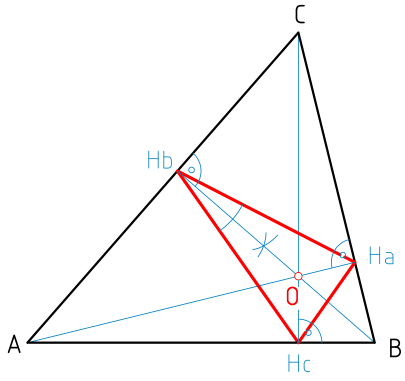
Es el punto donde concurren sus tres alturas o sus prolongaciones.



Triángulo órtico de un triángulo

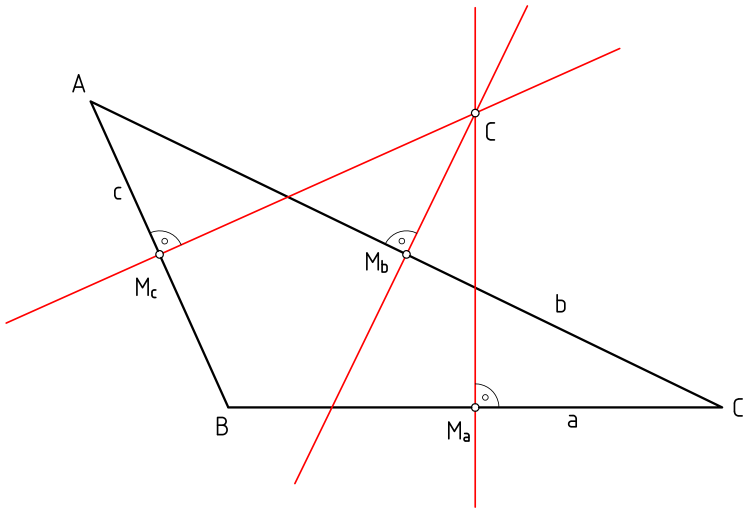
Es aquel cuyos vértices son los pies de las tres alturas del primero.

Las bisectrices interiores del triángulo órtico coinciden con las alturas del primero.



Mediatrices de un triángulo

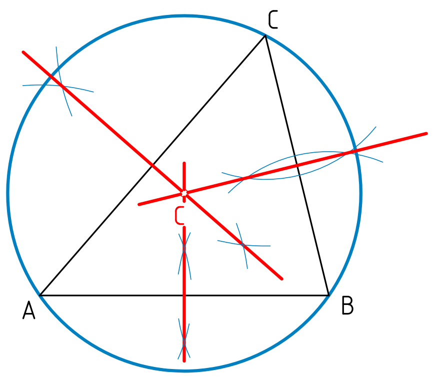
Son las rectas perpendiculares a cada lado en su punto medio.



Circuncentro de un triángulo

Es el punto donde concurren sus tres mediatrices.

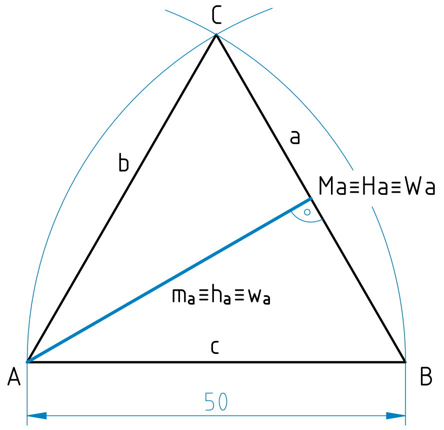
El circuncentro equidista de los tres vértices del triángulo por lo que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Propiedades del triángulo equilátero

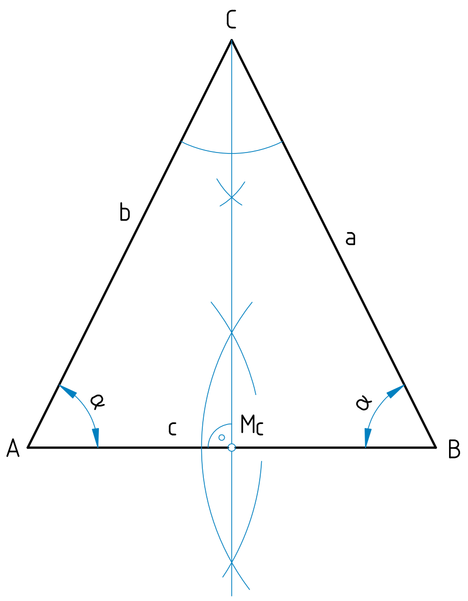
- El triángulo equilátero tiene iguales sus tres lados y sus tres ángulos, por eso se dice que es equiángulo y regular.
- La bisectriz de un ángulo coincide con la mediana, la altura y la mediatriz del lado opuesto. También es eje de simetría.

Editorial Alarcón. Apuntes de Dibujo Técnico. ISBN: 978-84-613-1320-4 www.editorial-alarcon.es



Propiedades del triángulo isósceles

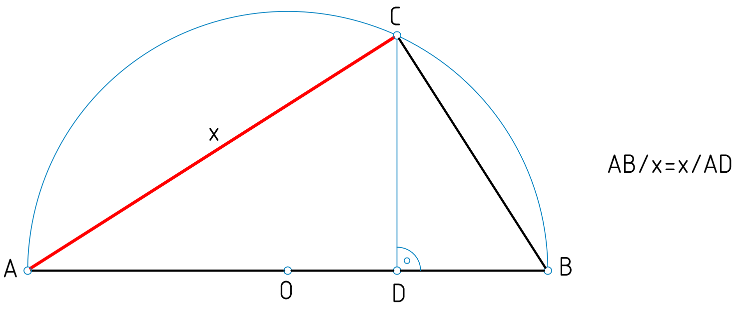
- Los ángulos contiguos a la base (lado desigual) son iguales.
- La bisectriz del ángulo desigual es a la vez mediana, mediatriz y altura. También es eje de simetría.
- El triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.
- Los lados opuestos a los ángulos iguales son iguales entre sí.



Teoremas sobre el triángulo rectángulo

- **Teorema del cateto**

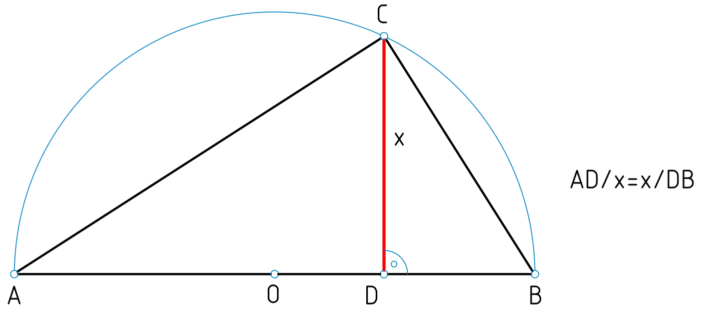
  Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.



De la construcción se desprende que una cuerda de una circunferencia es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus extremos y su proyección sobre él.

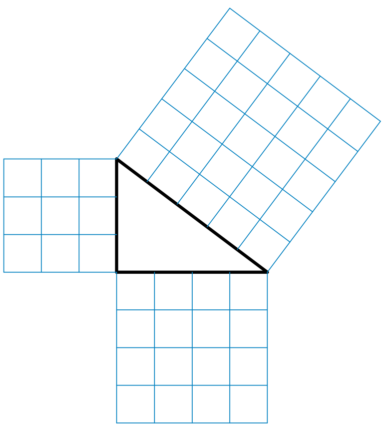
- **Teorema de la altura**

  La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a la hipotenusa.



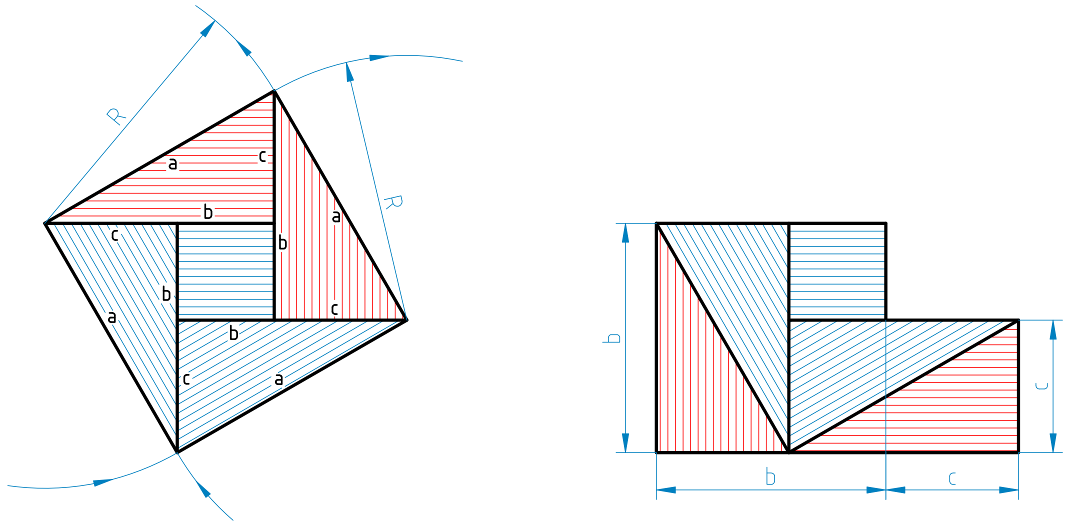
- **Teorema de Pitágoras**

  El cuadrado levantado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados levantados sobre los catetos.



Demostración gráfica del Teorema:

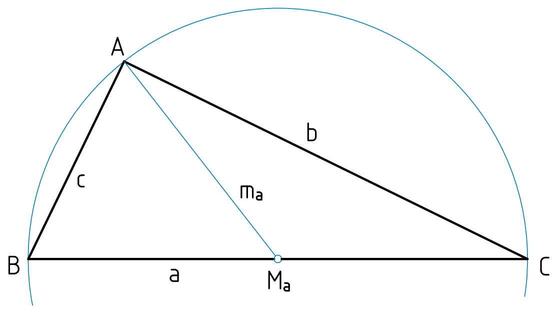
Dispóngase cuatro triángulos rectángulos iguales de lados a, b y c de manera que formen un cuadrado de lado la hipotenusa a. Mediante un giro cámbiese la posición de dos triángulos hasta conseguir la posición de la figura de la derecha. El resultado es una figura compuesta por dos cuadrados cuyos lados son los catetos del triángulo rectángulo.



La superficie de la primera figura es a^2 y la superficie de la segunda figura es igual a la de la primera y su valor es b^2+c^2.

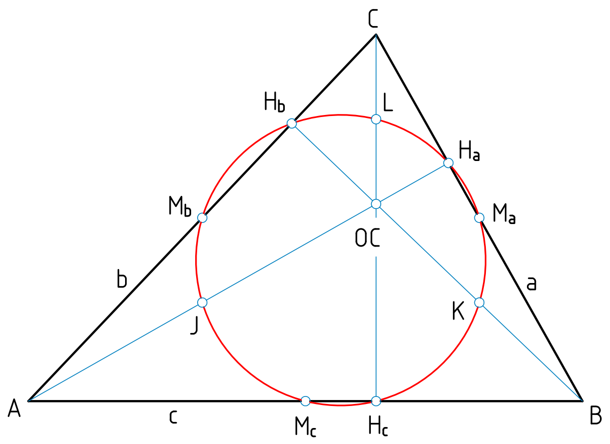
Triángulo rectángulo inscriptible

Todos los triángulos son inscriptibles pero en el caso del triángulo rectángulo la hipotenusa es diámetro de la circunferencia circunscrita y el radio de esta circunferencia es su mediana.



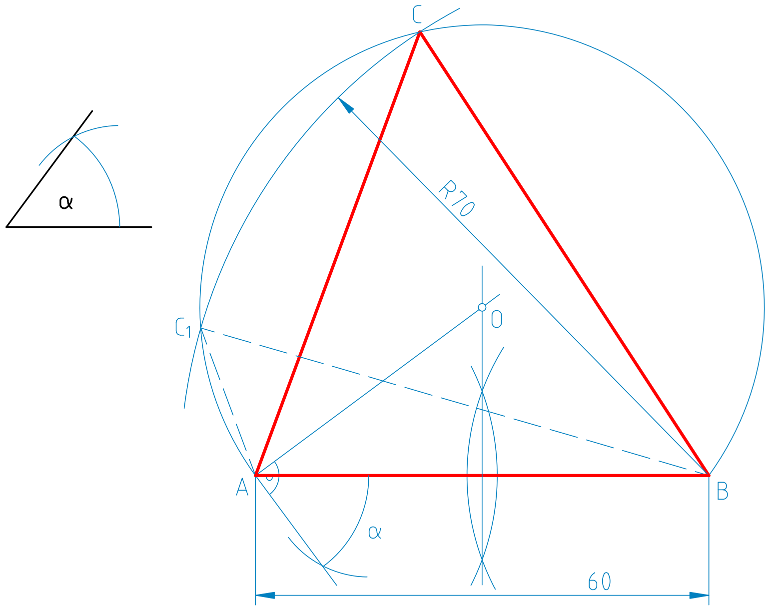
Circunferencia de Euler

La circunferencia que pasa por los tres pies de las tres medianas de un triangulo pasa por los tres pies de las tres alturas. También pasa por los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y cada vértice.

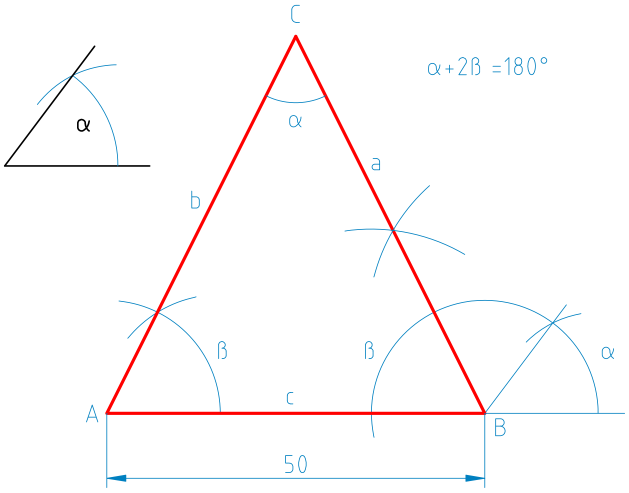


Ejercicios

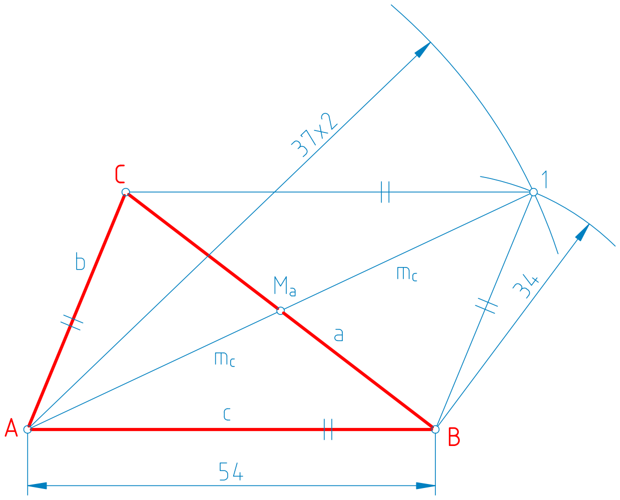
Construir un triángulo conocidos dos lados (70 y 60 mm) y el ángulo opuesto a uno de ellos.



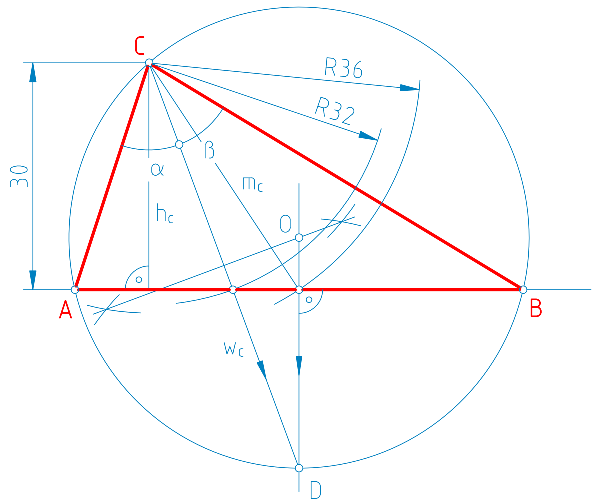
Construir un triángulo isósceles. La base mide 50 mm y el ángulo opuesto es α.



Construir un triángulo escaleno. Un lado mide 54 mm, otro 34 y la mediana del tercero 37.



Dibujar el triángulo: la altura del lado c mide 30 mm, su mediana, 36 y su bisectriz, 32.



La bisectriz cortará a la mediatriz del lado c en D, punto que divide al arco AB en dos iguales. La mediatriz del segmento CD corta a la mediatriz de c en el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.