

B7 Cuadriláteros

Cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

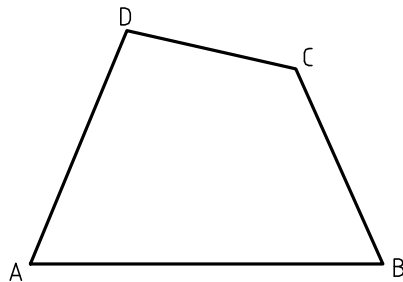
Lados opuestos son los que no tienen punto común. Ejemplo AB y CD, AD y BC.

Lados contiguos son los que tienen un extremo común. Ejemplo AB y BC.

Vértices opuestos son dos vértices que no están en el mismo lado. Ejemplo A y C.

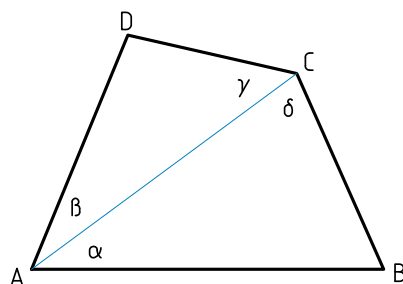
Vértices contiguos son dos vértices que están sobre un mismo lado. Ejemplo C y D.

Diagonales de un cuadrilátero son los segmentos que unen los vértices opuestos: AC y BD.



Ángulos interiores

Sus ángulos interiores suman cuatro rectos. Se demuestra trazando una diagonal que lo divide en dos triángulos y se sabe que la suma de los ángulos de cada uno de ellos es dos rectos.

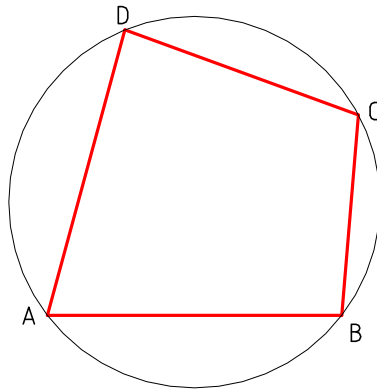


$$\begin{array}{r} \alpha + \beta + \delta = 180^\circ \\ + \beta + \delta + \gamma = 180^\circ \\ \hline \alpha + \beta + \beta + \delta + \delta + \gamma = 360^\circ \end{array}$$

Cuadriláteros inscriptibles

Cuadrilátero convexo inscriptible es aquel cuyos vértices se pueden apoyar en una circunferencia.

Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman dos rectos.



$$A+C=180^\circ$$

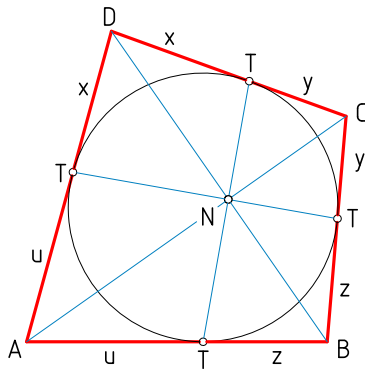
$$B+D=180^\circ$$

El ángulo A vale la mitad del arco BCD y el ángulo C, la mitad del DAB, arcos que suman una circunferencia.

Cuadriláteros circunscriptibles

Cuadrilátero circunscrito es aquel cuyos lados son tangentes a una circunferencia.

En un cuadrilátero circunscrito la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.



$$AB+CD = u+z+y+x$$

$$BC+AD = z+y+u+x$$

$$AB+CD = BC+AD$$

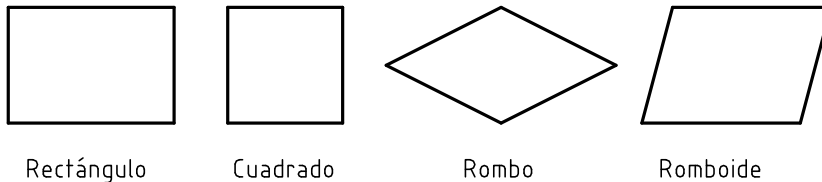
Los segmentos que unen un vértice a los puntos de tangencia en los lados que pasan por él, son iguales.

El punto N, intersección de las diagonales y de los segmentos que unen los puntos de tangencia en lados opuestos se llama Punto de Newton.

Clasificación

Los cuadriláteros se dividen en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramos



Los paralelogramos tienen dos pares de lados opuestos paralelos. Se dividen en rectángulos, cuadrados, rombos y romboides.

- Los cuadriláteros rectángulos son paralelogramos que tienen los cuatro ángulos interiores rectos y los lados iguales dos a dos.
Las diagonales del rectángulo son iguales y oblicuas.
- Los cuadrados son rectángulos que tienen los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos interiores rectos.
Las diagonales del cuadrado son iguales y perpendiculares.
- Los rombos son paralelogramos que tienen los cuatro lados iguales y paralelos dos a dos.
Los ángulos interiores opuestos son iguales.
Las diagonales del rombo son perpendiculares y son las bisectrices de los ángulos opuestos.
- Los romboides son paralelogramos que tienen los lados opuestos iguales y paralelos.
Los ángulos interiores opuestos son iguales.

Propiedades de los paralelogramos

- Los lados opuestos son iguales
- Los ángulos opuestos son iguales.
- Los ángulos adyacentes a un lado son suplementarios.
- Una diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales.

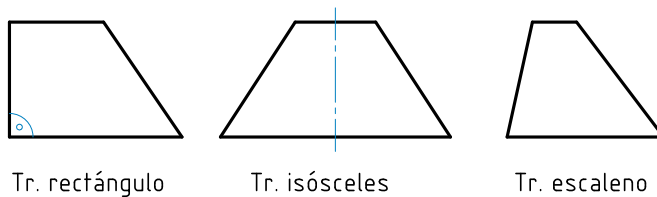
- Las diagonales se cortan en su punto medio o centro del paralelogramo.

Base y altura de los paralelogramos

Base de un paralelogramo es un lado cualquiera.

Altura de un paralelogramo es la distancia de la base al lado opuesto.

Trapecios



Los trapecios son cuadriláteros que tienen dos lados opuestos paralelos, (llamados bases, mayor y menor respectivamente).

Se dividen en rectángulos, isósceles y escalenos.

- EL trapecio rectángulo es aquel en el que uno de los lados es perpendicular a las bases.
- El trapecio isósceles tiene los lados no paralelos iguales.
- El trapecio escaleno es un trapecio genérico.

Altura de un trapecio

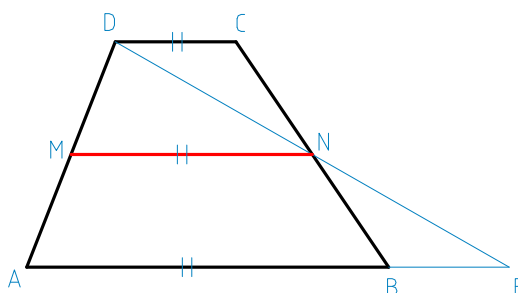
Es la distancia entre las dos bases.

Propiedad de los trapecios

Los ángulos contiguos a un lado no paralelo son suplementarios.

Base media del trapecio

Es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos. Es paralela a las bases y mide la semisuma de éstas.



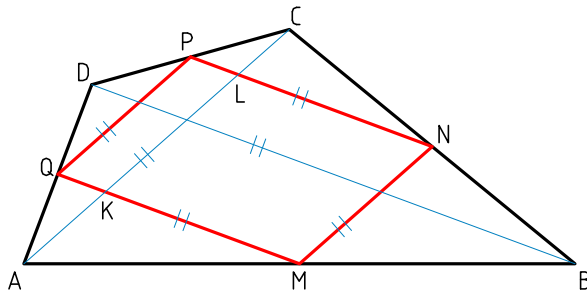
Si $BE = DC$, N es punto medio de BC y DE, por tanto, MN es la paralela media del triángulo AED y base media del trapecio.

Trapezoide

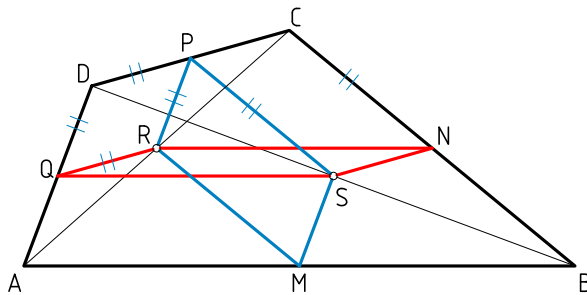
El trapezoide es un cuadrilátero genérico. No tiene lados paralelos.

Considerando las diagonales del cuadrilátero y sus paralelas medias de los triángulos que definen con los vértices, observamos que uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero se obtiene un paralelogramo, es este caso un romboide cuyos lados miden la mitad que las diagonales a las que son paralelos.

La superficie del romboide MNPQ es la mitad de la superficie del cuadrilátero: es fácil comprobar que la superficie del romboide KLPQ es la mitad de la superficie del triángulo ACD, pues el romboide tiene mitad base y mitad altura que el triángulo.



Trazando paralelas a los lados por sus puntos medios se obtienen dos romboides.



R y S son los puntos medios de las diagonales.

Ejercicio

Construir un cuadrilátero rectángulo dados el semiperímetro, 70 y el ángulo α que forman las diagonales.

